



Maastricht University

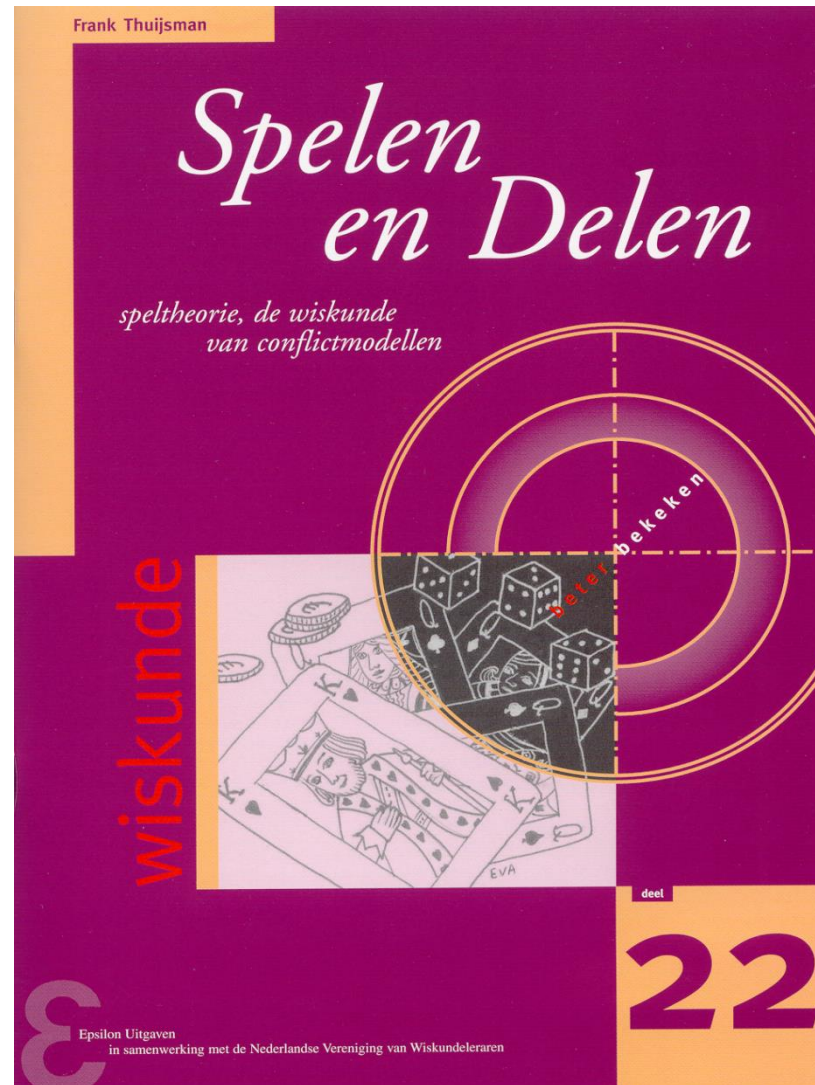
Gastles Bernardinuscollege, Heerlen

Speltheorie

Frank Thuijsman

27-09-2016

Department of Data Science and Knowledge Engineering



Inhoudsopgave Boekje

1. Een Bankroet Probleem uit de Talmud
2. Coöperatieve Spelen
3. Rationaliteit en Kennis
4. Spelen in Strategische Vorm
5. Matrixspelen
6. “Huwelijksproblemen”
7. Eindopdrachten
8. Antwoorden

Inhoudsopgave Boekje

1. Een Bankroet Probleem uit de Talmud
2. Coöperatieve Spelen
3. Rationaliteit en Kennis
4. Spelen in Strategische Vorm
5. Matrixspelen
6. “Huwelijksproblemen”
7. Eindopdrachten
8. Antwoorden

Inhoudsopgave Boekje

1. Een Bankroet Probleem uit de Talmud
2. Coöperatieve Spelen
3. Rationaliteit en Kennis
4. Spelen in Strategische Vorm
5. Matrixspelen
6. “Huwelijksproblemen”
7. Eindopdrachten
8. Antwoorden

Inhoudsopgave Boekje

- 1.
- 2.
- 3.
4. Spelen in Strategische Vorm
5. Matrixspelen
- 6.
- 7.
- 8.

Een stukje geschiedenis

2-Persoons Nulsom Spelen



1	3
4	2

1928

John von Neumann

2-Persoons Nulsom Spelen



Speler 1

Speler 2

1	3
4	2

John von Neumann

2-Persoons Nulsom Spelen



$1 - p$	1	3
p	4	2

John von Neumann

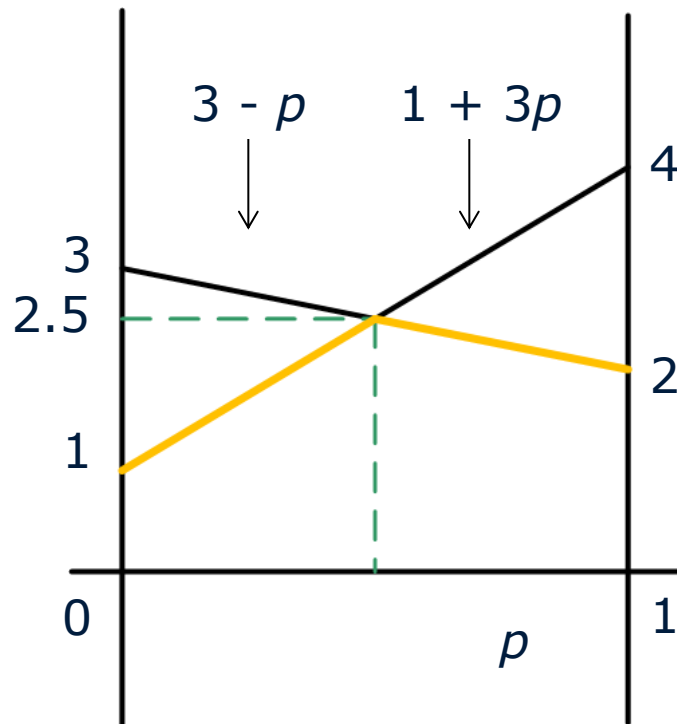
2-Persoons Nulsom Spelen



$1 - p$	1	3
p	4	2
	$1 + 3p$	$3 - p$

John von Neumann

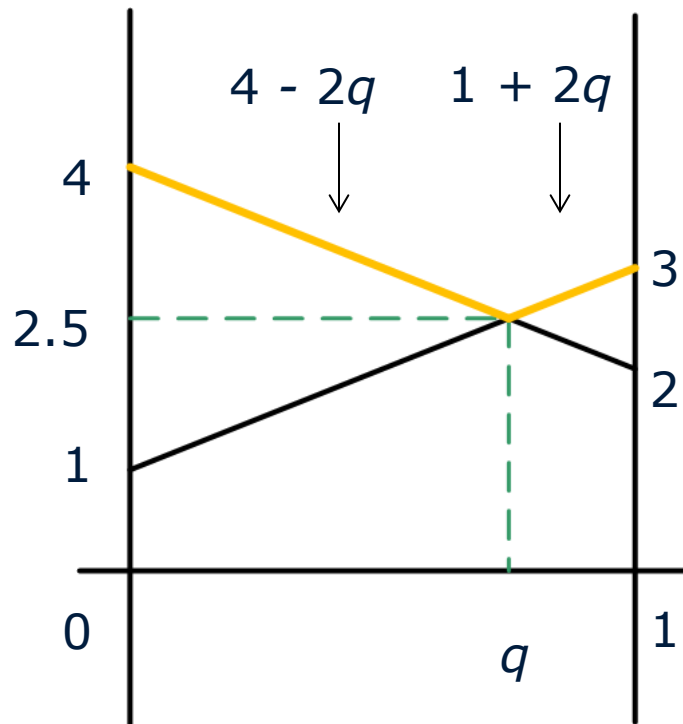
2-Persoons Nulsom Spelen



$1 - p$	1	3
p	4	2
	$1 + 3p$	$3 - p$

**Met $p = 1/2$ maximaliseert
speler 1 het minimum
om minstens 2.5 te krijgen.**

2-Persoons Nulsom Spelen



	$1 - q$	q	
1	1	3	$1 + 2q$
4	4	2	$4 - 2q$

**Met $q = 3/4$ minimaliseert
speler 2 het maximum
om hoogstens 2.5 te betalen.**

2-Persoons Nulsom Spelen



John von Neumann

	1/4	3/4
1/2	1	3
1/2	4	2

Het getal 2.5 noemen we de **waarde** van het spel.

(1/2, 1/2) en (1/4, 3/4)
noemen we **optimale strategieën**
voor spelers 1 en 2.

2-Persoons Nulsom Spelen



De MiniMax Stelling

Iedere eindige matrix A heeft een waarde, d.w.z. :

Er is een uniek getal v zódat

$$\max_x \min_y xAy^T = v = \min_y \max_x xAy^T$$

1928

John von Neumann

Lineair Programmeren

Max v

zodanig dat

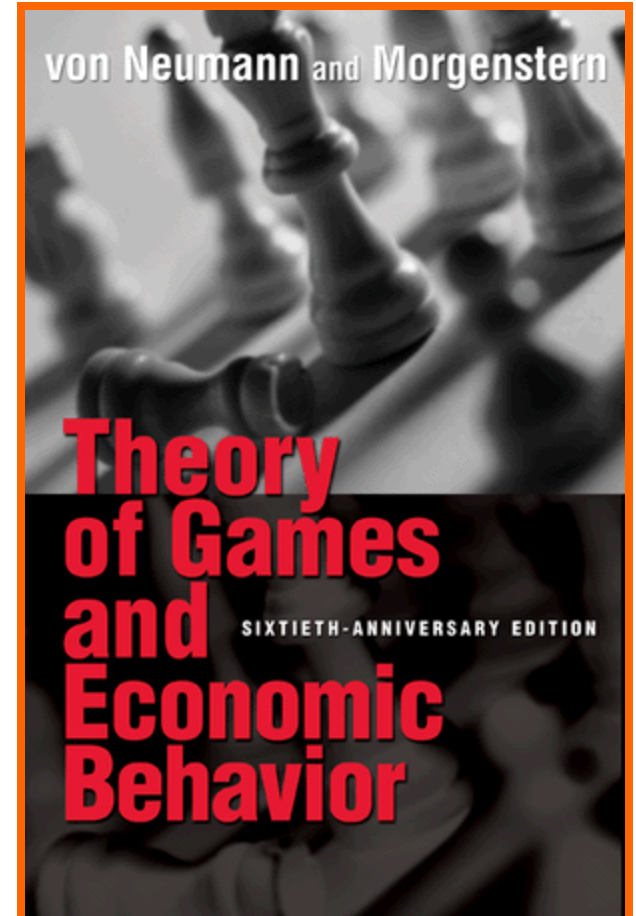
$$\begin{aligned} xAe_j^T &\geq v, \text{ voor elke } j \\ x_i &\geq 0, \text{ voor elke } i \\ \sum_i x_i &= 1 \end{aligned}$$

Min v

zodanig dat

$$\begin{aligned} e_iAy^T &\leq v, \text{ voor elke } i \\ y_j &\geq 0, \text{ voor elke } j \\ \sum_j y_j &= 1 \end{aligned}$$

Basisboek Speltheorie



John von Neumann Oskar Morgenstern

1944

Department of Data Science and Knowledge Engineering

Frank Thuijsman

Van 2-Persoon Nulsom Spelen ...



1	3
4	2

1928

John von Neumann

... naar n -Persoons Spelen



1,6	3,-4
4,0	2,5

1949



John von Neumann

John Nash

... naar n -Persoons Spelen

1/2

1,6

3,-4

1/2

4,0

2,5

Speler 1 zou krijgen:

2.5

2.5



John Nash

... naar n -Persoons Spelen

1/2

1/2

1,6	3,-4
4,0	2,5

Speler 1 zou krijgen: 2.5 2.5

Speler 2 zou krijgen: 3 0.5



John Nash

... naar n -Persoons Spelen

1/2	1,6	3,-4
1/2	4,0	2,5

Speler 1 zou krijgen: 2.5 2.5

Speler 2 zou krijgen: 3 0.5

**Als *speler 1* doet wat goed is voor hemzelf,
dan zal *speler 2* liever *Links* spelen!**

Dit leidt NIET tot een stabiele oplossing!



John Nash

Stabiliteit in n -Persoons Spelen

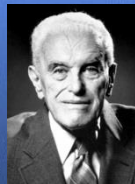


**The Sveriges Riksbank
Prize in Economic
Sciences in Memory of
Alfred Nobel 1994**

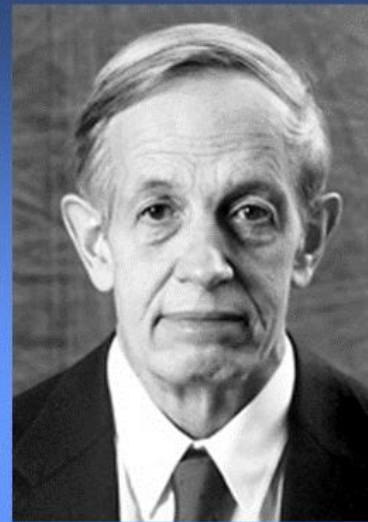
"for their pioneering analysis of
equilibria in the theory of non-
cooperative games"



Reinhard Selten



John Harsanyi



John F. Nash Jr.
USA

Princeton University
Princeton, NJ, USA
b. 1928

1994



Play movie

... dus NIET ieder voor zich !!!

1/2	1,6	3,-4
1/2	4,0	2,5

Speler 1 zou krijgen: 2.5 2.5
Speler 2 zou krijgen: 3 0.5

We moeten het anders benaderen!



John Nash

... dus NIET ieder voor zich !!!

$1 - p$	1,6	3,-4
p	4,0	2,5
	$6 - 6p$	$-4 + 9p$

Wanneer speler 1 met $p = 2/3$ speelt,
dan is **speler 2** indifferent
tussen Links en Rechts,
want elk geeft hem **2**.



John Nash

... dus NIET ieder voor zich !!!

	$1 - q$	q
$1 + 2q$	1,6	3,-4
$4 - 2q$	4,0	2,5

Wanneer speler 2 met $q = 3/4$ speelt,
dan is speler 1 indifferent
tussen Boven en Onder,
want elk geeft hem 2.5.



John Nash

... dus NIET ieder voor zich !!!

	1/4	3/4
1/3	1,6	3,-4
2/3	4,0	2,5

Het paar $((1/3, 2/3), (1/4, 3/4))$ heet een **evenwicht** voor dit spel; speler 1 krijgt 2.5 en speler 2 krijgt 2.



John Nash

... dus NIET ieder voor zich !!!

Een *evenwicht* is een tweetal strategieën die beste antwoorden op elkaar zijn.

1949



John Nash

... dus NIET ieder voor zich !!!

Existentie van Evenwichten:

Ieder eindig n -persoons spel heeft minstens één evenwicht.

Een *evenwicht* is een n -tal strategieën, met de eigenschap dat geen van de spelers zich eenzijdig kan verbeteren.

1949



John Nash

EQUILIBRIUM POINTS IN n -PERSON GAMES

BY JOHN F. NASH, JR.*

PRINCETON UNIVERSITY

Communicated by S. Lefschetz, November 16, 1949

One may define a concept of an n -person game in which each player has a finite set of pure strategies and in which a definite set of payments to the n players corresponds to each n -tuple of pure strategies, one strategy being taken for each player. For mixed strategies, which are probability distributions over the pure strategies, the pay-off functions are the expectations of the players, thus becoming polylinear forms in the probabilities with which the various players play their various pure strategies.

Any n -tuple of strategies, one for each player, may be regarded as a point in the product space obtained by multiplying the n strategy spaces of the players. One such n -tuple counters another if the strategy of each player in the countering n -tuple yields the highest obtainable expectation for its player against the $n - 1$ strategies of the other players in the countered n -tuple. A self-countering n -tuple is called an equilibrium point.

The correspondence of each n -tuple with its set of countering n -tuples gives a one-to-many mapping of the product space into itself. From the definition of countering we see that the set of countering points of a point is convex. By using the continuity of the pay-off functions we see that the graph of the mapping is closed. The closedness is equivalent to saying: if $P_1, P_2, \dots$ and $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ are sequences of points in the product space where $Q_n \rightarrow Q, P_n \rightarrow P$ and Q_n counters P_n then Q counters P .

Since the graph is closed and since the image of each point under the mapping is convex, we infer from Kakutani's theorem¹ that the mapping has a fixed point (i.e., point contained in its image). Hence there is an equilibrium point.

In the two-person zero-sum case the "main theorem"² and the existence of an equilibrium point are equivalent. In this case any two equilibrium points lead to the same expectations for the players, but this need not occur in general.

* The author is indebted to Dr. David Gale for suggesting the use of Kakutani's theorem to simplify the proof and to the A. E. C. for financial support.

¹ Kakutani, S., *Duke Math. J.*, 8, 457-459 (1941).

² Von Neumann, J., and Morgenstern, O., *The Theory of Games and Economic Behaviour*, Chap. 3, Princeton University Press, Princeton, 1947.

1949

John Nash met zijn vrouw Alicia



**1957
-1963**

John Nash met zijn vrouw Alicia



**2001 -
mei 2015**

Inhoudsopgave Boekje

1. Een Bankroet Probleem uit de Talmud
2. Coöperatieve Spelen
3. Rationaliteit en Kennis
4. Spelen in Strategische Vorm
5. Matrixspelen
6. “Huwelijksproblemen”
7. Eindopdrachten
8. Antwoorden



“Huwelijksproblemen”



De theoreticus en de practicus van speeddating en nierdonaties

JONATHAN WITTEMAN

16-10-12 - 00:00

Lloyd Shapley geldt als een pionier van de speltheorie, Alvin Roth als de man die de leer toepaste. Samen wonnen ze de Nobelprijs voor economie.

Speeddating, schoolkeuze, nierdonatie: hoewel hun onderzoeksgebied abstract klinkt, zijn de toepassingen van het werk van Lloyd Shapley en Alvin Roth uiterst praktisch. De Amerikanen wonnen maandag de Nobelprijs voor economie voor hun onderzoek naar 'de theorie van stabiele allocatie en de praktijk van marktontwerp'.

De 89-jarige Shapley is de theoreticus van het stel, Roth (60) de man van de vertaling naar de praktijk. Shapley, eigenlijk vooral een wiskundige - 'Ik heb in mijn leven nog nooit één les economie gehad', reageerde hij op zijn Nobelprijs - geldt als een van de pioniers van de speltheorie, de tak van wetenschap die bestudeert hoe mensen tot hun beslissingen komen.

“Huwelijksproblemen”



“Huwelijksproblemen”

Ekonomipriset 2012

The Prize in Economic Sciences 2012




Alvin E. Roth
Harvard University, Cambridge, MA, USA and Harvard Business School, Boston, MA, USA


Lloyd S. Shapley
University of California, Los Angeles, CA, USA

“för teorin om stabila allokeringar och för utformning av marknadsinstitutioner i praktiken”
“for the theory of stable allocations and the practice of market design”

© Kungl. Vetenskap

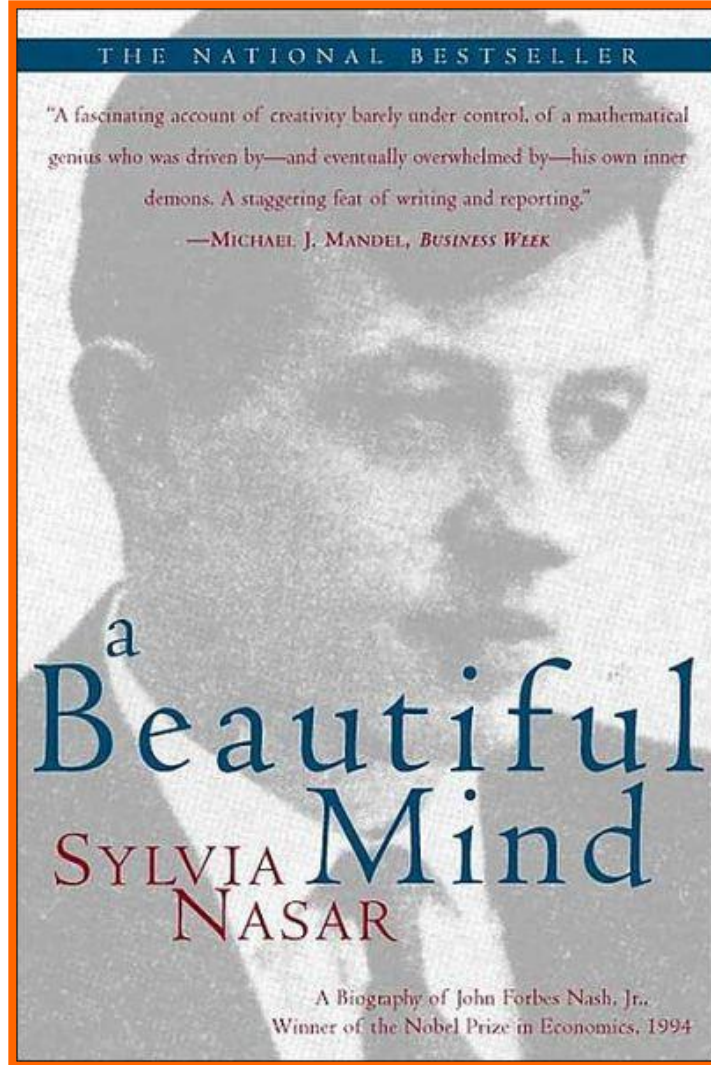
2012

“Huwelijksproblemen”



“Huwelijksproblemen”

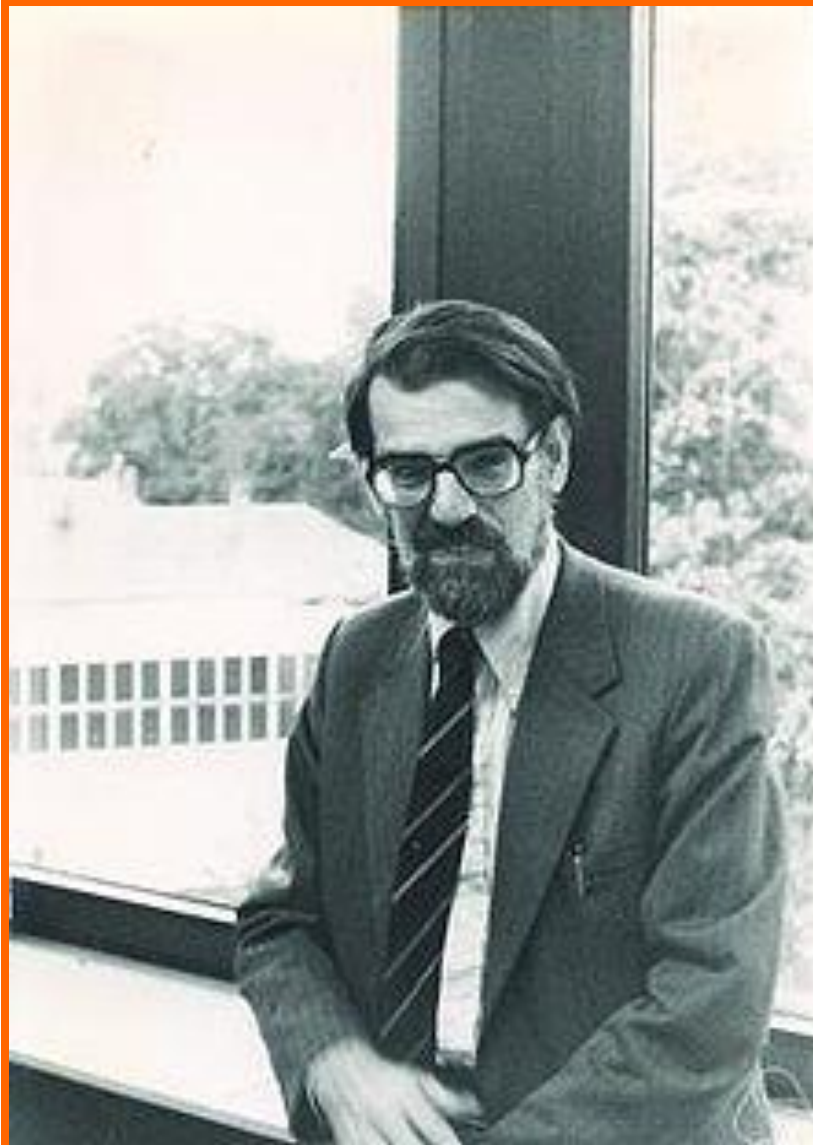




1998

Deel 1 Een schitterend brein

1	Bluefield (1928-1945)	25
2	Carnegie Institute of Technology (juni 1945-juni 1948)	40
3	Het middelpunt van het heelal (Princeton, najaar 1948)	49
4	De school der genieën (Princeton, najaar 1948)	57
5	Genialiteit (Princeton, 1948-1949)	65
6	Het spel (Princeton, voorjaar 1949)	73
7	John von Neumann (Princeton, 1948-1949)	77
8	De speltheorie	80
9	Het onderhandelingsprobleem (Princeton, voorjaar 1949)	85
10	Het concurrentie idee van Nash (Princeton 1949-1950)	89
11	Lloyd (Princeton, 1950)	97
12	De oorlog van het vernuft (RAND, zomer 1950)	102
13	De speltheorie bij RAND	114
14	Dienstplicht (Princeton, 1950-1951)	122
15	Een schitterende stelling (Princeton, 1950-1951)	126
16	MIT	132
17	Stoute jongens	138
18	Experimenten (RAND, zomer 1952)	145
19	De rooien (voorjaar 1953)	150
20	Meetkunde	153



Lloyd
Shapley

Citaten uit “*A Beautiful Mind*”

Shapley, geboren en getogen in Cambridge, Massachusetts, was een van de vijf kinderen van een van de beroemdste en meest gerespecteerde wetenschappers van Amerika, de Harvard-astronoom Harlow Shapley.

Lloyd Shapley was een oorlogsheld.⁴ Hij werd in 1943 gemobiliseerd. Het aanbod om officier te worden sloeg hij af. Datzelfde jaar kreeg Shapley, inmiddels sergeant in het Army Air Corps en gelegerd in het Chinese Sheng-Du, de Bronze Star voor het kraken van de Japanse weercode. In 1945 keerde hij terug naar Harvard, waar hij al voor zijn legertijd begonnen was aan zijn wiskundestudie, en hij studeerde in 1948 af.

Toen Shapley naar Princeton kwam, beschouwde Von Neumann hem al als de intelligentste ster aan het firmament van het speltheoretische onderzoek.

Citaten uit “*A Beautiful Mind*”

Nash was een van de eerste studenten die Shapley op het Graduate College ontmoette. Zij deelden enige tijd een badkamer. Beiden bezochten elke vrijdag Tuckers speltheoriewerkgroep, die, nu Tucker op Stanford was, geleid werd door Kuhn en Gale. De indruk die Nash op Shapley maakte toen zij voor het eerst over wiskunde praatten, kan het beste omschreven worden als: Nash deed Shapley versteld staan. Shapley zag natuurlijk wat ook de anderen zagen – het kinderachtige, krengerige, aanstootgevende gedrag – maar hij zag nog veel meer. Hij werd verbijsterd door wat hij later zou beschrijven als het ‘slimme, schitterende, logische brein’ van Nash.

“Huwelijksproblemen”

**College admissions and the stability of marriage,
American Mathematical Monthly 69, 1962**



David Gale



Lloyd S. Shapley

“Huwelijksproblemen”

	1	2	3	4	5
Anny	Freddy	Harry	Kenny	Gerry	Lenny
Betty	Gerry	Kenny	Freddy	Harry	Lenny
Conny	Lenny	Harry	Gerry	Freddy	Kenny
Dolly	Harry	Lenny	Freddy	Gerry	Kenny
Emmy	Harry	Kenny	Gerry	Lenny	Freddy

	1	2	3	4	5
Freddy	Conny	Betty	Anny	Emmy	Dolly
Gerry	Dolly	Anny	Betty	Emmy	Conny
Harry	Emmy	Anny	Dolly	Betty	Conny
Kenny	Emmy	Conny	Anny	Dolly	Betty
Lenny	Emmy	Anny	Betty	Conny	Dolly

“Huwelijksproblemen”

	1	2	3	4	5
Anny	Freddy		Kenny	Gerry	Lenny
Betty	Gerry	Kenny	Freddy		Lenny
Conny	Lenny		Gerry	Freddy	Kenny
Dolly		Lenny	Freddy	Gerry	Kenny
		Kenny	Gerry	Lenny	Freddy

	1	2	3	4	5
Freddy	Conny	Betty	Anny		Dolly
Gerry	Dolly	Anny	Betty		Conny
		Anny	Dolly	Betty	Conny
Kenny		Conny	Anny	Dolly	Betty
Lenny		Anny	Betty	Conny	Dolly

“Huwelijksproblemen”

	1	2	3	4	5
Anny	Freddy		Kenny	Gerry	Lenny
Betty	Gerry	Kenny	Freddy		Lenny
Conny	Lenny		Gerry	Freddy	Kenny
Dolly		Lenny		Gerry	Kenny
		Kenny	Gerry	Lenny	Freddy

	1	2	3	4	5
Freddy	Conny	Betty	Anny		
Gerry	Dolly	Anny	Betty		Conny
		Anny	Dolly	Betty	Conny
Kenny		Conny	Anny	Dolly	Betty
Lenny		Anny	Betty	Conny	Dolly

“Huwelijksproblemen”

	1	2	3	4	5
Anny	Freddy ¹	Harry	Kenny	Gerry	Lenny
Betty	Gerry ²	Kenny ⁹	Freddy	Harry	Lenny
Conny	Lenny ³	Harry	Gerry	Freddy	Kenny
Dolly	Harry ⁴	Lenny ⁶	Freddy ⁷	Gerry ⁸	Kenny
Emmy	Harry ⁵	Kenny	Gerry	Lenny	Freddy

	1	2	3	4	5
Freddy	Conny	Betty	Anny ¹	Emmy	Dolly ⁷
Gerry	Dolly ⁸	Anny	Betty ²	Emmy	Conny
Harry	Emmy ⁵	Anny	Dolly ⁴	Betty	Conny
Kenny	Emmy	Conny	Anny	Dolly	Betty ⁹
Lenny	Emmy	Anny	Betty	Conny ³	Dolly ⁶

“Huwelijksproblemen”

Gale-Shapley algoritme:

- Geeft beste stabiele koppeling voor de “aanzoekers”
- Ook toepasbaar wanneer groepen niet even groot
- Ook wanneer niet elk aan elk gekoppeld wil worden
- Ook toepasbaar voor “college admissions”

Inhoudsopgave Boekje

1. Een Bankroet Probleem uit de Talmud
2. Coöperatieve Spelen
3. Rationaliteit en Kennis
4. Spelen in Strategische Vorm
5. Matrixspelen
6. “Huwelijksproblemen”
7. Eindopdrachten
8. Antwoorden

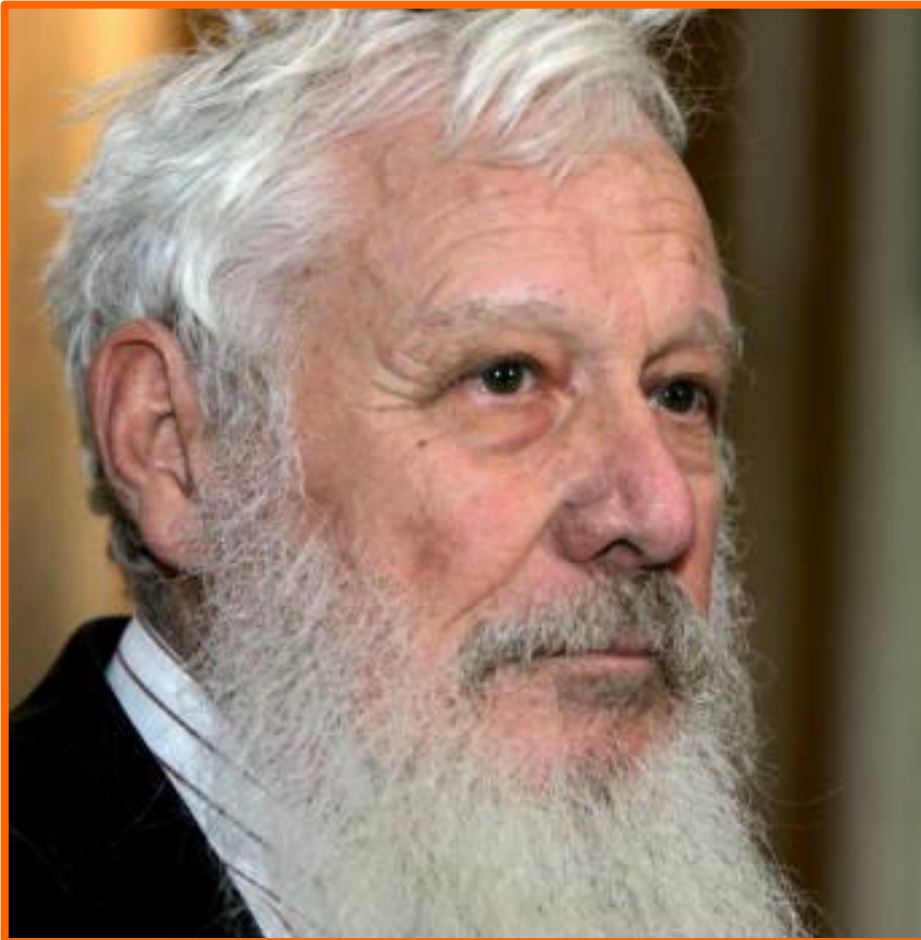
Nobelprijs Economie 2005



Thomas Schelling

Bob Aumann

Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud, *Journal of Economic Theory* 36, 1985



Bob Aumann



Michael Maschler

Department of Data Science and Knowledge Engineering

Frank Thuijsman

A problem of rights arbitration from the Talmud, *Mathematical Social Sciences* 2, 1982



Barry O'Neill

Drie Weduwen



Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Kethuboth, Fol. 93a, Babylonian Talmud, Epstein, ed, 1935

“If a man who was married to three wives died and the kethubah of one was 100 zuz, of the other 200 zuz, and of the third 300 zuz, and the estate was worth only 100 zuz, then the sum is divided equally.

If the estate was worth 200 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimants respectively of the 200 and the 300 zuz receive each 75 zuz.

If the estate was worth 300 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimant of the 200 zuz receives 100 zuz while the claimant of the 300 zuz receives 150 zuz.

Similarly if three persons contributed to a joint fund and they had made a loss or a profit then they share in the same manner.”

Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Nalatenschap

Weduwe		100	200	300
	100	33.33		
	200	33.33		
	300	33.33		

Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Kethuboth, Fol. 93a, Babylonian Talmud, Epstein, ed, 1935

"If a man who was married to three wives died and the kethubah of one was 100 zuz, of the other 200 zuz, and of the third 300 zuz, and the estate was worth only 100 zuz, then the sum is divided equally.

If the estate was worth 200 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimants respectively of the 200 and the 300 zuz receive each 75 zuz.

If the estate was worth 300 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimant of the 200 zuz receives 100 zuz while the claimant of the 300 zuz receives 150 zuz.

Similarly if three persons contributed to a joint fund and they had made a loss or a profit then they share in the same manner."

Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Nalatenschap

Weduwe		100	200	300
	100	33.33	50	
	200	33.33	75	
	300	33.33	75	

Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Kethuboth, Fol. 93a, Babylonian Talmud, Epstein, ed, 1935

"If a man who was married to three wives died and the kethubah of one was 100 zuz, of the other 200 zuz, and of the third 300 zuz, and the estate was worth only 100 zuz, then the sum is divided equally.

If the estate was worth 200 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimants respectively of the 200 and the 300 zuz receive each 75 zuz.

If the estate was worth 300 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimant of the 200 zuz receives 100 zuz while the claimant of the 300 zuz receives 150 zuz.

Similarly if three persons contributed to a joint fund and they had made a loss or a profit then they share in the same manner."

Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Nalatenschap

Weduwe		100	200	300
	100	33.33	50	50
	200	33.33	75	100
	300	33.33	75	150

Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Nalatenschap

Weduwe		100	200	300
	100	33.33	50	50
	200	33.33	75	100
	300	33.33	75	150

Gelijk **???** **Proportioneel**

Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Kethuboth, Fol. 93a, Babylonian Talmud, Epstein, ed, 1935

"If a man who was married to three wives died and the kethubah of one was 100 zuz, of the other 200 zuz, and of the third 300 zuz, and the estate was worth only 100 zuz, then the sum is divided equally.

If the estate was worth 200 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimants respectively of the 200 and the 300 zuz receive each 75 zuz.

If the estate was worth 300 zuz then the claimant of the 100 zuz receives 50 zuz and the claimant of the 200 zuz receives 100 zuz while the claimant of the 300 zuz receives 150 zuz.

Similarly if three persons contributed to a joint fund and they had made a loss or a profit then they share in the same manner."

Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Nalatenschap

Weduwe		100	200	300
	100	33.33	50	50
	200	33.33	75	100
	300	33.33	75	150

Gelijk ??? Proportioneel

Andere bedragen: "they share in the same way." ?????

Een Bankroet Probleem uit de Talmud

Nalatenschap

Weduwe		100	200	300
	100	33.33	50	50
	200	33.33	75	100
	300	33.33	75	150

Gelijk ??? Proportioneel

Andere bedragen: "they share in the same way." ??????

Hoe verdeel je 400?

Wat als een vierde weduwe 400 claimt?

'Hydraulic' rationing,
Mathematical Social Sciences 40, 2000

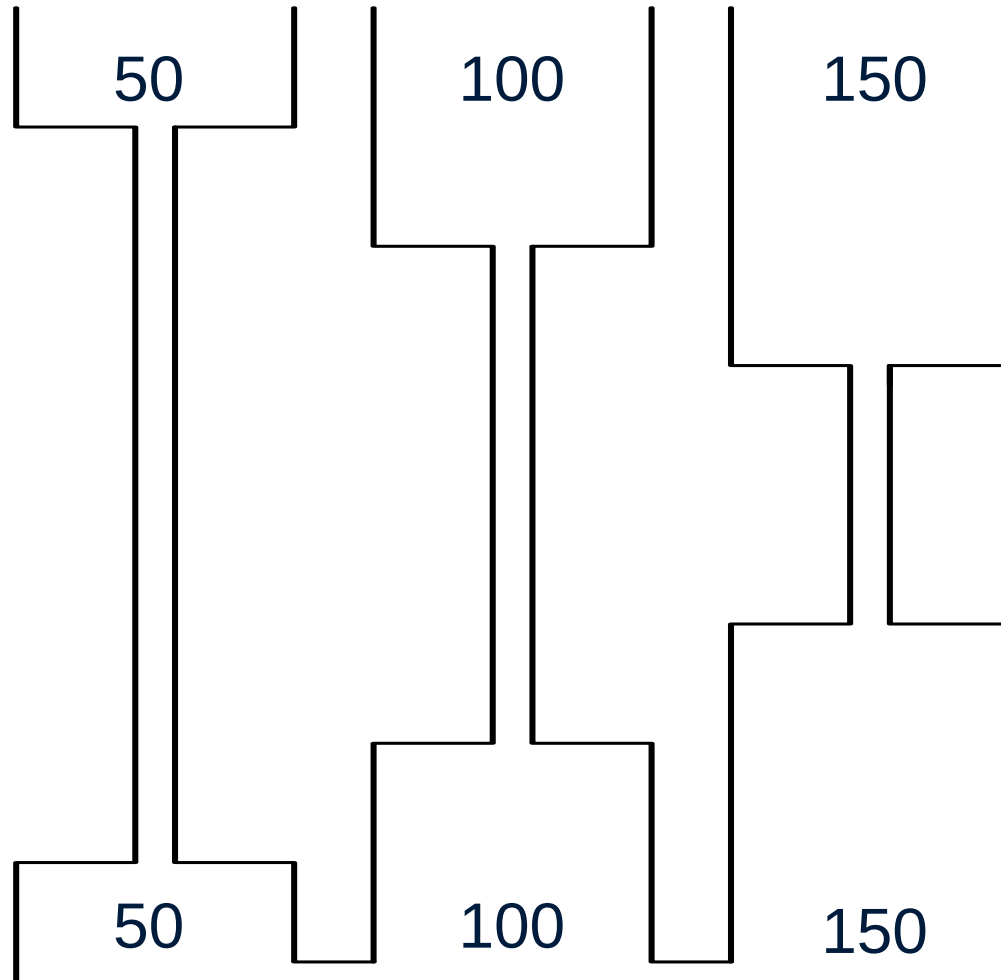


Marek M. Kaminski

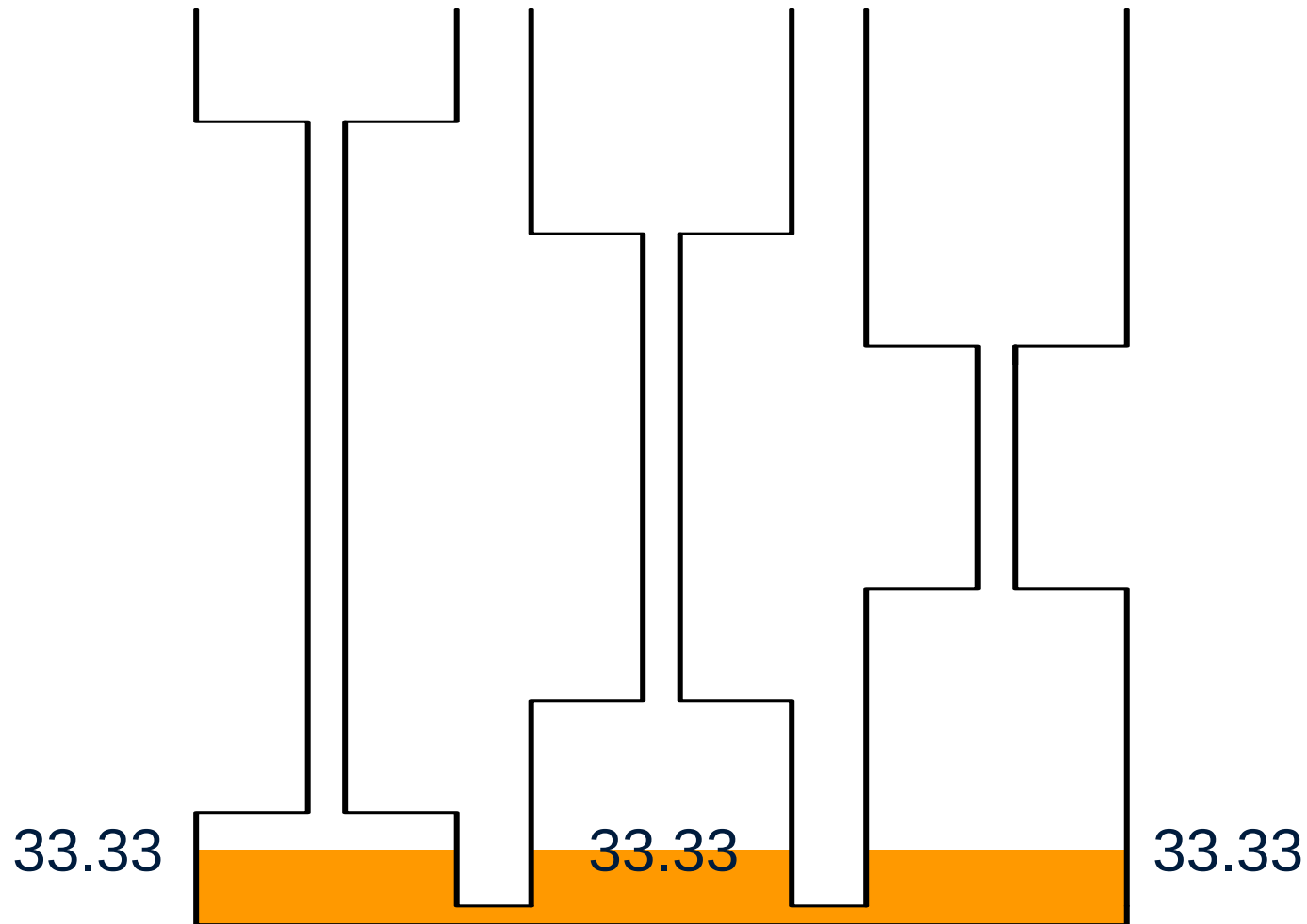
Department of Data Science and Knowledge Engineering

Frank Thuijsman

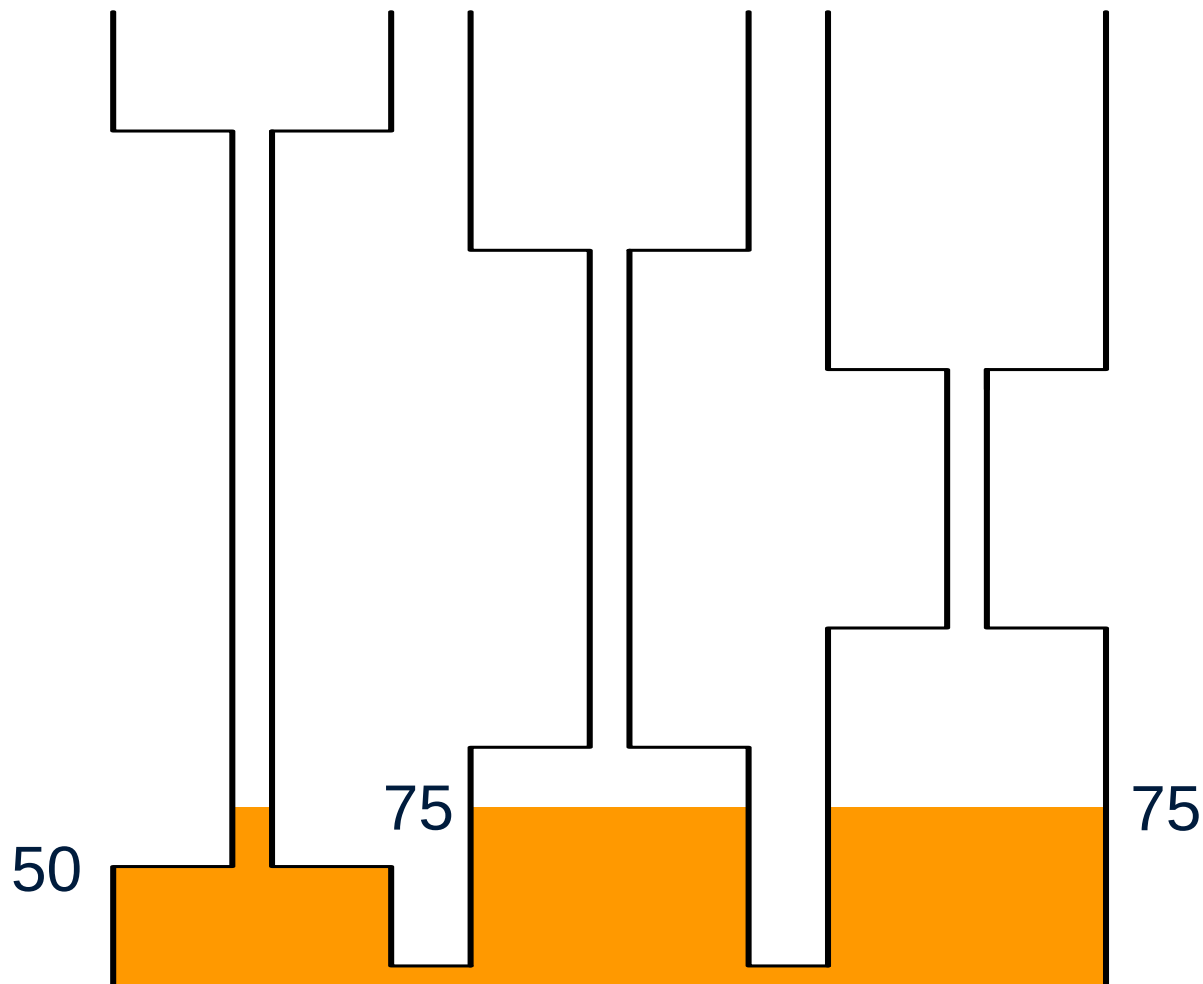
Communicerende Vaten



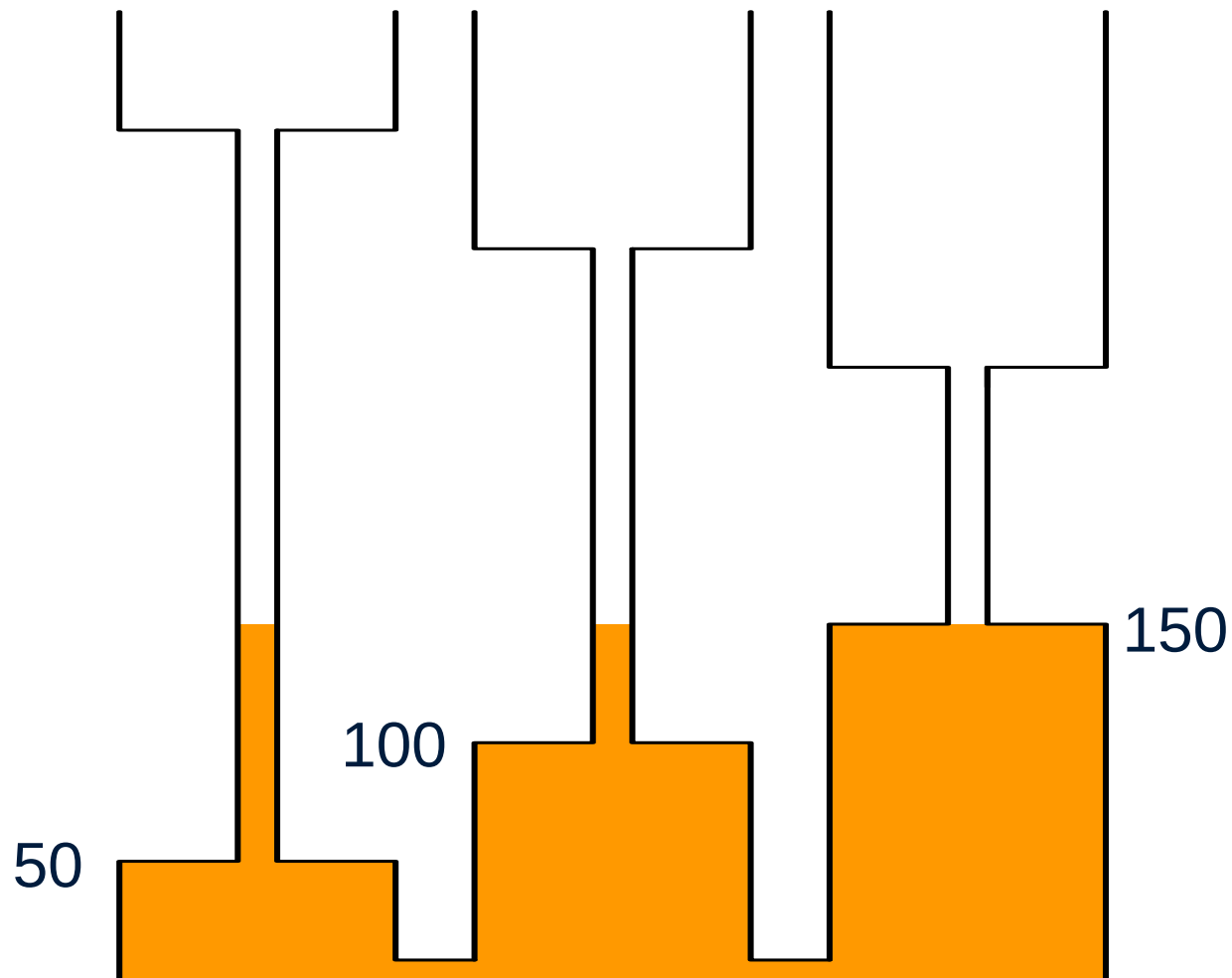
Communicerende Vaten: 100



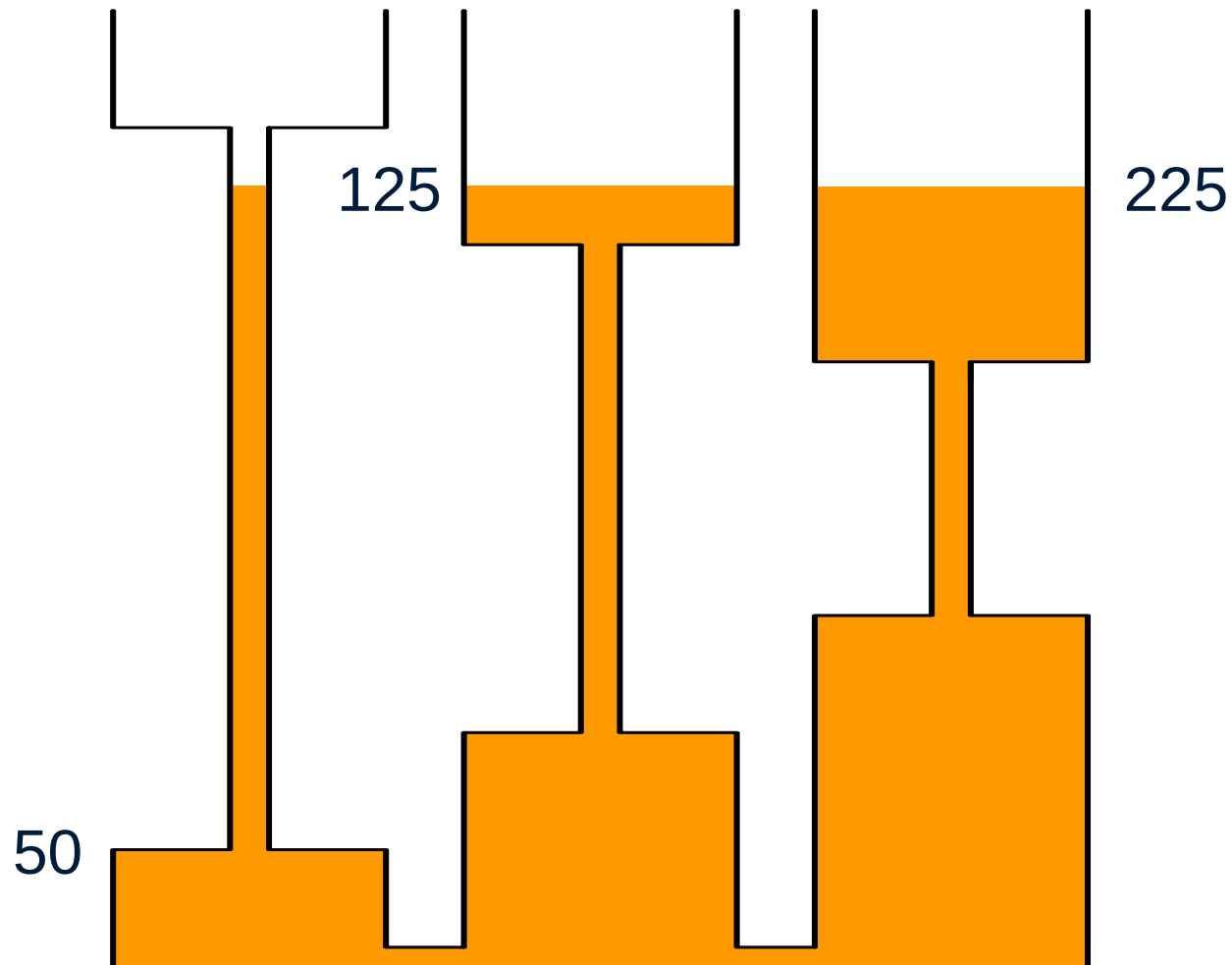
Communicerende Vaten: 200



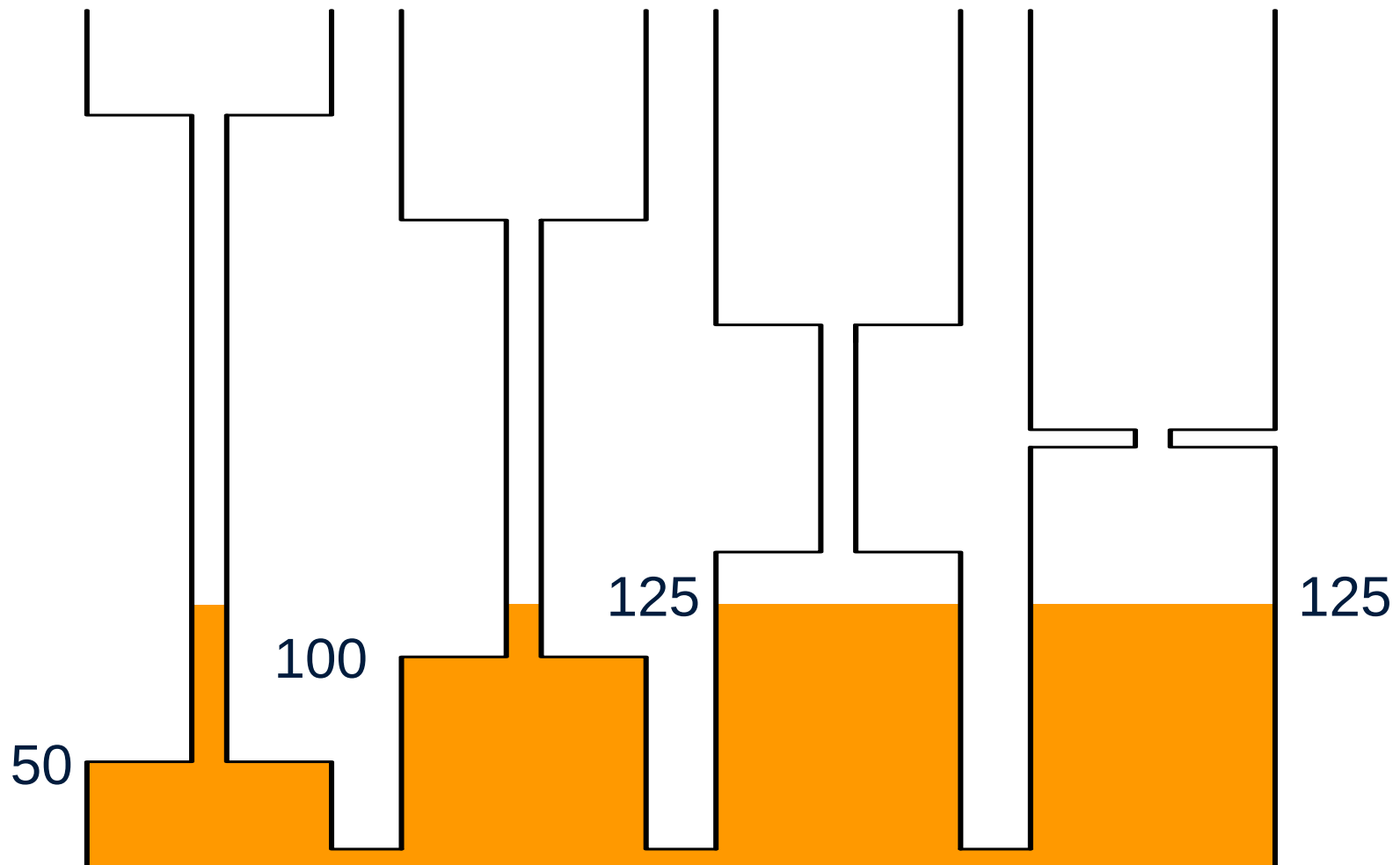
Communicerende Vaten: 300



Communicerende Vaten: 400



Communicerende Vaten: 400 voor 4





Department of Data Science and Knowledge Engineering

Frank Thuijsman



Department of Data Science and Knowledge Engineering

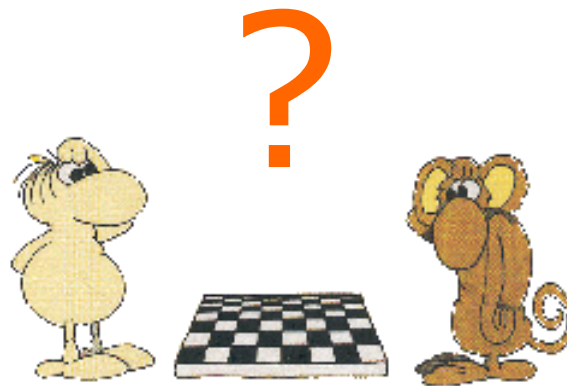
Frank Thuijsman



Department of Data Science and Knowledge Engineering

Frank Thuijsman

Hartelijk Dank voor Jullie Aandacht!



Bachelor Open Dag Universiteit Maastricht 12 november 2016

Toegift ...

Movie 1
Movie 2
Movie 3

